Тригонометрические уравнения и отбор корней

Уравнения и системы уравнений занимают важное место в математике. В 10 классе очень много внимания уделяется решению тригонометрических уравнений. Для успешного решения тригонометрических уравнений необходимо знать не только формулы и методы решения этих уравнений, но и правильно отбирать корни на заданном промежутке или при других дополнительных условиях. В последние годы в профильном варианте ЕГЭ по математике 13 задание это - «Решить тригонометрическое уравнение и выполнить отбор корней, удовлетворяющих условию или решить систему уравнений».

Рассмотрим некоторые примеры.

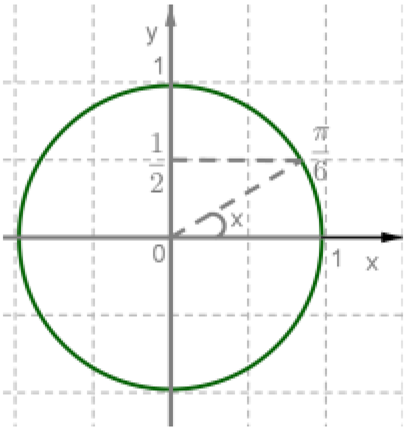
Уравнение $\sin x=a$

Если $|a|>1$, то уравнение $\sin x=a$ не имеет корней.
Например, уравнение $\sin x=2$ не имеет корней.

Если $|a|\le 1$, то корни уравнения выражаются формулой $x=(-1)^k\arcsin a+\pi k, k\in Z$.

Что же такое arcsina? Арксинус в переводе с латинского означает «дуга и синус». Это обратная функция.
Если $|a|\le 1$, то arcsina (арксинус a) — это такое число из отрезка $[-\pi/2;\pi/2]$, синус которого равен a.

Говоря иначе:
$\arcsin a=x \Rightarrow \sin x=a, |a|\le 1, x\in[-\pi/2;\pi/2]$.
Рассмотрим данную теорию на примере.
Пример:
найти arcsin1/2.
Выражение arcsin1/2 *показывает, что синус угла* x *равен* 1/2, *т. е.* sinx=1/2.
Далее просто находим точку этого синуса на числовой окружности, что и является ответом:



точка 1/2, *находящаяся на оси* y, *соответствует точке* π6 *на числовой окружности.*
Значит, $\arcsin 1/2=\pi/6$.

Обрати внимание!

Если $\sin\pi/6=1/2$, то $\arcsin 1/2=\pi/6$.

В первом случае по точке на числовой окружности находим значение синуса, а во втором — наоборот, по значению синуса находим точку на числовой окружности. Движение в обратную сторону. Это и есть арксинус.

Теорема. Для любого $a\in[-1;1]$ справедлива формула $\arcsin(-a)=-\arcsin a$.

Частные случаи:
1. $\sin x=0\Rightarrow x=\pi k, k\in Z$;
2. $\sin x=1\Rightarrow x=\pi/2+2\pi k, k\in Z$;
3. $\sin x=-1\Rightarrow x=-\pi/2+2\pi k, k\in Z$.

Пример:

решить уравнение $\sin x=-1/2$.

Используем формулу $x=(-1)^k\arcsin a+\pi k, k\in Z$

и получаем ответ $x=(-1)^k(-\pi/6)+\pi k, k\in Z$.

Уравнения вида:
$\sin f(x)=a$, $\cos f(x)=a$
имеют смысл только тогда, когда $-1\leq a\leq 1$
Уравнения вида:
$\mathrm{tg}\,x=a$, $\mathrm{ctg}\,x=a$
имеют смысл уже при всех значениях a.

То есть, не надо знать вообще никаких формул, чтобы спокойно ответить, что уравнения, например:

$\sin x=1000$
$\cos(3x-\sin(x))=2$
$\sin(2x2-2x+1)=-3$
Корней не имеют!!!
Почему?
Потому что они "не попадают" в промежуток от минус единицы до плюс единицы.

Тригонометрия

1. $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1;\quad tg\,\alpha\cdot ctg\,\alpha=1;$

2. $tg\,\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\quad ctg\,\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$

3. $tg\,\alpha=\dfrac{1}{ctg\,\alpha};\quad ctg\,\alpha=\dfrac{1}{tg\,\alpha};$

4. $1+tg^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha};\quad 1+ctg^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha};$

5. $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta;$

6. $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta;$

7. $tg(\alpha\pm\beta)=\dfrac{tg\,\alpha\pm tg\,\beta}{1\mp tg\,\alpha\cdot tg\,\beta};$

8. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha;$

9. $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$

10. $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha;$

11. $tg\,2\alpha=\dfrac{2tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha};\quad ctg\,2\alpha=\dfrac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\,\alpha};$

12. $\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha\pm\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha\mp\beta}{2};$

13. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2};$

14. $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2};$

15. $tg\,\alpha\pm tg\,\beta=\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta};$

16. $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2};\quad \cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2};$

17. $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right);$

18. $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right);$

19. $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$

20. $\left|\sin\dfrac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}};\quad \left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}};$

21. $tg\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};\quad ctg\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$

Таблица значений тригонометрических функций

α, рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
α, °	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{\sqrt3}{2}$	1	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt2}{2}$	$-\frac{\sqrt3}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt3}{2}$	$-\frac{\sqrt2}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cosα	1	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt2}{2}$	$-\frac{\sqrt3}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt3}{2}$	$-\frac{\sqrt2}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{\sqrt3}{2}$	1
tgα	0	$\frac{1}{\sqrt3}$	1	$\sqrt3$	–	$-\sqrt3$	-1	$-\frac{1}{\sqrt3}$	0	$\frac{1}{\sqrt3}$	1	$\sqrt3$	–	$-\sqrt3$	-1	$-\frac{1}{\sqrt3}$	0
ctgα	–	$\sqrt3$	1	$\frac{1}{\sqrt3}$	0	$-\frac{1}{\sqrt3}$	-1	$-\sqrt3$	–	$\sqrt3$	1	$\frac{1}{\sqrt3}$	0	$-\frac{1}{\sqrt3}$	-1	$-\sqrt3$	–

Решение тригонометрических уравнений

Уравнение	***Общее решение***	***Частные случаи***		
		a = 0	***a = 1***	***a = −1***
$\sin x=a$	$x=(-1)^n\arcsin a+\pi n$ ***или*** $\left[\begin{array}{l}x_1=\arcsin a+2\pi n\\ x_2=\pi-\arcsin a+2\pi n\end{array}\right.$	$x=\pi n$	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$	$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$
$\cos x=a$	$x=\pm\arccos a+2\pi n$ ***или*** $\left[\begin{array}{l}x_1=\arccos a+2\pi n\\ x_2=-\arccos a+2\pi n\end{array}\right.$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n$	$x=2\pi n$	$x=\pi+2\pi n$
$tg\,x=a$	$x=arctg\ a+\pi n$	$x=\pi n$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi n$	$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$
$ctg\,x=a$	$x=arcctg\ a+\pi n$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi n$	$x=\frac{3\pi}{4}+\pi n$
где $n\in Z$ (Z – множество целых чисел: …, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, …)				